

## GAS-PARTIKEL-STRÖMUNGEN AN EINEM KEIL IM ÜBERSCHALL

H. W. STOCK

Dornier GmbH, Postfach 1420, Friedrichshafen, B.R.D.

(Received 8 July 1978)

**Zusammenfassung** — Für einen gefrorenen Stoss bei Gas-Partikel-Strömungen ist gezeigt worden, dass das Partikelvolumen auf die Zustandsgrößen unmittelbar hinter dem Stoss keinen Einfluss hat. Damit entspricht der Gaszustand unmittelbar hinter dem Stoss dem des reinen Gases. Bei Partikeln kleinen Durchmessers ist der Einfluss des Partikelvolumens auf die Gleichgewichtszustände hinter dem Relaxationsgebiet nur bei grossen Partikelmasseströmen und geringen Partikeldichten, bzw. hohen Gasdichten spürbar. Bei vernachlässigbarem Partikelvolumen können die Gleichgewichtszustände mit den Gleichungen idealer Gase berechnet werden, wenn für das Verhältnis der spezifischen Wärmen und für die Schallgeschwindigkeit die Größen des Gas-Partikelgemisches eingesetzt werden.

Für das Partikelverhalten in der Stosschicht am Überschallkeil konnten analytische Ausdrücke für die Flugbahn, die Auftreffgeschwindigkeit auf den Keil und die Auftreffdichte der Partikel angegeben werden. Bei der Herleitung der Gleichungen wurden drei verschiedene Widerstandsgesetze benutzt, die den gesamten Reynoldszahlbereich abdecken.

BEZEICHNUNGEN		$\bar{y}$ ,	Koordinate senkrecht zur Keiloberfläche;
$a$ ,	Schallgeschwindigkeit;	$V_A$ ,	Auftreffgeschwindigkeit der Partikel;
$A_i, B_i$ ,	Zahlenwerte definiert in (46);	$V'_A$ ,	Auftreffgeschwindigkeit der Partikel an der Keilspitze.
$c$ ,	spezifische Wärmekapazität der Partikel;	Griechische Buchstaben	
$c_p$ ,	spezifische Wärmekapazität der Luft;	$\delta$ ,	Keilwinkel;
$c_w$ ,	Widerstandsbeiwert;	$\varepsilon$ ,	Volumenanteil der Partikel;
$c^*$ ,	kritische Geschwindigkeit;	$\eta$ ,	Verhältnis von Partikel- zu Gasmassenstrom;
$D$ ,	Partikeldurchmesser;	$\theta$ ,	Stosswinkel;
$E$ ,	Auftreffdichte;	$\kappa$ ,	Verhältnis der spezifischen Wärmen;
$H$ ,	Höhe;	$\lambda_G$ ,	Relaxationslänge der Geschwindigkeit;
$M$ ,	Machzahl;	$\lambda_T$ ,	Relaxationslänge der Temperatur;
$p$ ,	statischer Druck;	$\mu$ ,	Dynamische Zähigkeit;
$p_T$ ,	Totaldruck;	$\rho$ ,	Dichte;
$Pr$ ,	Prandtlzahl;	$\varphi$ ,	Masseanteil der Partikel;
$P_b$ ,	Ausdrücke definiert in (52), (55) und (58);	$\phi_b$ ,	Größen definiert in (27);
$Re$ ,	Reynoldszahl;	$\Omega_i$ ,	Größen definiert in (15).
$T$ ,	statische Temperatur;	Indices	
$T_T$ ,	Totaltemperatur;	$G$ ,	Gemisch;
$U$ ,	resultierende Geschwindigkeit;	$p$ ,	Partikel;
$u_x, u_1, u_n, u_r$ ,	Komponenten der Geschwindigkeit, definiert in den Bildern 3 und 4 (Kap. 1-4);	$\infty$ ,	vor dem Stoss;
$u, v$ ,	dimensionslose Geschwindigkeitskomponenten, (Kap. 5);	$1$ ,	hinter dem Stoss.
$x$ ,	Koordinate senkrecht zum Stoss;		
$x^+$ ,	Anfangswert für $x$ am Beginn des Gültigkeitsbereiches eines Widerstandsgesetzes;		
$\bar{x}$ ,	Koordinate entlang der Keiloberfläche;		
$y$ ,	Koordinate parallel zum Stoss;		
$y^+$ ,	Anfangswert für $y$ am Beginn des Gültigkeitsbereiches eines Widerstandsgesetzes;		

### 1. EINLEITUNG

STÖSSE in einer Gas-Partikel Überschallströmung stören das Temperatur- und Geschwindigkeitsgleichgewicht zwischen den Phasen. Ein Relaxationsgebiet entsteht, in dem der Gleichgewichtszustand zwischen

den Phasen durch Impuls- und Wärmeaustausch wiederhergestellt wird. Bei kleinem Partikelmassestrom ist der neue Gleichgewichtszustand gegeben durch die Grössen der reinen Gasströmung. Wächst dagegen der Partikelmassestrom an, so wird der Impuls und Wärmeaustausch zwischen den Phasen den neuen Gleichgewichtszustand beeinflussen.

Relaxationsvorgänge bei senkrechten Verdichtungsstössen und nicht vernachlässigbarem Partikelmassestrom sind in [1-4] behandelt worden. Die Arbeit von Schmitt-Schubert [5] beschäftigt sich mit der Struktur senkrechter Stösse bei geringem Partikelmassestrom. Relaxationsvorgänge bei expandierenden Strömungen sind in der Arbeit von Marble [2] für kleine Partikelmasseströme beschrieben worden.

Die Flugbahnen, Auftreffgeschwindigkeiten und Auftreffdichten von Partikeln bei Strömungen mit kleinem Partikelmassestrom um Keile, Kegel und Kugeln sind in den Arbeiten [6-9] behandelt worden.

Die vorliegende Arbeit untersucht für Strömungen mit schiefen Stössen und nicht vernachlässigbarem Partikelmassestrom den Einfluss des Partikelvolumens auf die Zustände unmittelbar hinter einem gefrorenen Stoss und auf die Zustände im Gleichgewichtsgebiet für Partikel kleinen Durchmessers. Für kleine Partikelmasseströme werden analytische Ausdrücke für Flugbahnen, Auftreffgeschwindigkeiten und Auftreffdichten der Partikel am Überschallkeil hergeleitet ohne die vereinfachenden Annahmen von [8, 9] zu benutzen.

2. AUSDEHNUNG DER RELAXATIONSGBIETE

Im folgenden wird angenommen, dass die Partikel aus demselben, inkompressiblen Material konstanter spezifischer Wärme bestehen, kugelförmige Gestalt

besitzen und die Partikel keiner Phasenänderung unterliegen. Die Gasdichte soll so sein, dass die Partikeldurchmesser sehr viel grösser sind als die mittlere freie Weglänge der Gasmoleküle. Alle Wechselwirkungen zwischen den Partikeln werden vernachlässigt.

Nach Marble [2] lassen sich für Gas-Partikel-Strömungen bei Nichtgleichgewichtszuständen die Ausdehnungen der Relaxationsgebiete berechnen.

Für die Relaxation der Geschwindigkeit gilt:

$$\lambda_G = \frac{\rho_p D^2}{18\mu} \Delta u. \tag{1}$$

$\lambda_G$  ist dabei die Weglänge, die ein Partikel vom Durchmesser  $D$  und der Dichte  $\rho_p$  braucht, um die anfängliche Geschwindigkeitsdifferenz  $\Delta u$  um das  $1/e$  fache zu vermindern;  $\mu$  ist die dynamische Viskosität des Gases.

Entsprechend ergibt sich für die Relaxation der Temperatur:

$$\lambda_T = \frac{\rho_p D^2 Pr}{12\mu} \Delta u, \tag{2}$$

wobei  $Pr$  die Prandtl-Zahl des Gases ist.

In Bild 1 sind die Relaxationslängen in der Atmosphäre für einen Umlenkwinkel von  $20^\circ$  bei  $M_\infty = 2$  und 0 bzw. 15 km Höhe gezeigt. Typische Verhältnisse für die Dichten  $\rho_\infty/\rho_p = 10^{-3}$  und die spezifischen Wärmen  $c/c_p = 1$  wurden gewählt.  $\rho_\infty$  ist die Gasdichte vor dem Stoss,  $c$  und  $c_p$  sind die spezifischen Wärmen für Partikel bzw. Luft. Wie man sieht, sind die Relaxationslängen der Temperatur und Geschwindigkeit für Partikel mit einem Durchmesser  $\leq 1 \mu\text{m}$  kleiner als 1 mm.

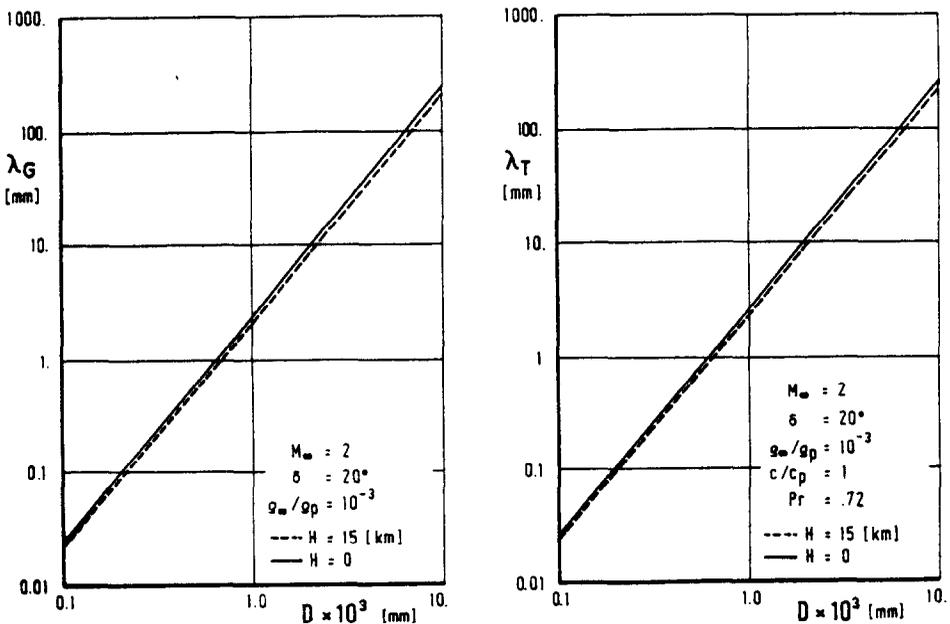


Abb. 1. Geschwindigkeits- und Temperaturrelaxationslängen in Abhängigkeit vom Partikeldurchmesser.

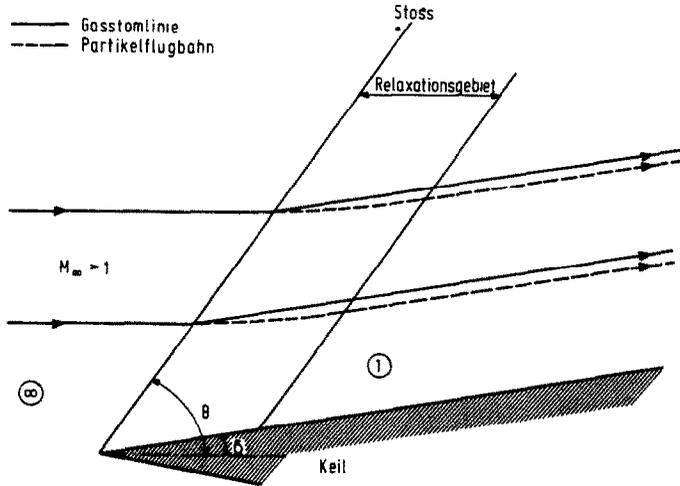


ABB. 2. Schematische Darstellung der Gas-Partikel-Strömung am Überschallkeil.

3. EINFLUSS DES PARTIKELVOLUMENS AUF DIE ZUSTÄNDE UNMITTELBAR HINTER EINEM GEFRORENEN VERDICHTUNGSSTOSS

Einige in der Rechnung benötigte Grössen, die schon in [1] definiert wurden, mögen hier kurz wiederholt werden. Der Parameter  $\eta$  ist das Verhältnis von Partikel- zu Gasmassestrom,

$$\eta = \frac{\varphi}{1 - \varphi} \frac{u}{u_p}, \quad (3)$$

wobei  $\varphi$  den Masseanteil der Partikel darstellt.  $\varphi$  ist mit dem Volumenanteil der Partikel  $\varepsilon$  verknüpft über

$$\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} = \frac{\varphi}{1 - \varphi} \frac{\rho}{\rho_p}. \quad (4)$$

Das Verhältnis der spezifischen Wärmen  $\kappa_G$  und die Schallgeschwindigkeit  $a_G$  des Gemisches aus Gas und Partikeln sind gegeben durch

$$\kappa_G = \kappa \frac{1 + \eta \frac{c}{c_p}}{1 + \kappa \eta \frac{c}{c_p}} \quad (5)$$

$$a_G^2 = a^2 \frac{\kappa_G}{\kappa} \frac{1 + \eta \frac{\rho}{\rho_p}}{1 + \eta} \quad (6)$$

$\kappa$  ist das Verhältnis der spezifischen Wärmen und  $a$  die Schallgeschwindigkeit des Gases.

Bild 2 zeigt den Verlauf der Strömung um einen Keil bei Überschallanströmung. Bei einem gefrorenen Verdichtungsstoss sind die Geschwindigkeit und Temperatur der Partikel unmittelbar hinter dem Stoss identisch zu denen in der ungestörten Strömung.

Die Erhaltungssätze bei einem gefrorenen Stoss lauten [1]:

Kontinuitätsgleichung:

$$\rho_\infty u_{n_\infty} = \rho_1 u_{n_1}, \quad (7)$$

Impulsgleichung parallel zum Stoss:

$$u_{t_\infty} = u_{t_1}, \quad (8)$$

Impulsgleichung senkrecht zum Stoss:

$$p_\infty + \frac{\rho_\infty u_{n_\infty}^2}{1 + \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}} = p_1 + \frac{\rho_1 u_{n_1}^2}{1 + \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}}, \quad (9)$$

Energiegleichung:

$$\frac{U_\infty^2}{2} + c_p T_\infty + \eta \frac{p_\infty}{\rho_p} = \frac{U_1^2}{2} + c_p T_1 + \eta \frac{p_1}{\rho_p}. \quad (10)$$

In Bild 3 sind die Geschwindigkeitskomponenten bei einer Umlenkung  $\delta$  und der sich ergebenden Stossneigung  $\theta$  gezeigt,  $p$  und  $T$  sind die statischen Grössen für Druck und Temperatur.

Auf die Herleitung der nachfolgenden Gleichungen wird hier nicht eingegangen, sie entsprechen der Behandlung der Gleichungen für ideale Gase [10].

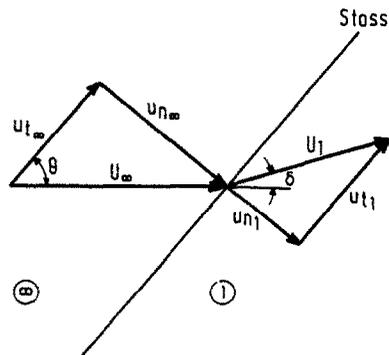


ABB. 3. Definition der Winkel und Geschwindigkeitskomponenten am Stoss.

Rankine-Hugoniot Bedingungen:

(15)

$$\frac{p_1}{p_\infty} = \frac{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \frac{\rho_1}{\rho_\infty} - 1 + \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p} \left( \frac{\rho_1}{\rho_\infty} - 1 \right)}{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} - \frac{\rho_1}{\rho_\infty} + \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p} \left( \frac{\rho_1}{\rho_\infty} - 1 \right)}, \quad (11) \quad \Omega_4 = - \frac{2\kappa}{\kappa + 1} \frac{\eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}}{1 + \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}},$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_\infty} = \frac{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \frac{p_1}{p_\infty} + 1 - \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p} \left( \frac{p_1}{p_\infty} - 1 \right)}{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} + \frac{p_1}{p_\infty} - \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p} \left( \frac{p_1}{p_\infty} - 1 \right)}, \quad (12) \quad \Omega_5 = \frac{\eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}}{1 + \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}} \left\{ \frac{2(\kappa - 1)}{\kappa + 1} - \frac{(\kappa - 1)^2}{\kappa(\kappa + 1)} \left[ 1 + \frac{2\eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}}{\kappa M_\infty^2} \frac{1}{1 + \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}} \right] \right\}$$

Prandtl-Beziehung:

$$\Omega_6 = \frac{1}{2} [\Omega_4(\kappa + 1) - (\kappa - 1)\{(1 - \Omega_1)(1 - \Omega_3) - 1\}].$$

$$(1 - \Omega_1) \left[ c^{*2}(1 + \Omega_2) - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} u_{T_\infty}^2 (1 - \Omega_3) \right] = u_{T_\infty} u_{n1} (1 + \Omega_4) + u_{T_\infty}^2 \Omega_5, \quad (13)$$

Der Stosswinkel  $\theta$  errechnet sich aus:

$$\sin^6 \theta + a \sin^4 \theta + b \sin^2 \theta + c = 0, \quad (16)$$

mit

Stosspolare: (siehe Bild 4)

$$\left( \frac{v_1}{c^*} \right)^2 = \left( \frac{u_\infty}{c^*} - \frac{u_1}{c^*} \right)^2 \times \left[ (1 + \Omega_4) \frac{u_\infty u_1}{c^* c^*} - (1 - \Omega_1)(1 + \Omega_2) + \Omega_5 \left( \frac{u_\infty}{c^*} \right)^2 \right] / \left[ (1 - \Omega_1)(1 + \Omega_2) + \frac{2}{\kappa + 1} (1 + \Omega_6) \left( \frac{u_\infty}{c^*} \right)^2 - (1 + \Omega_4) \frac{u_\infty u_1}{c^* c^*} \right] \quad (14)$$

$$a = - \frac{M_\infty^2 + 2}{M_\infty^2} - \left[ \kappa - \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p} (\kappa - 1) \right] \sin^2 \delta,$$

$$b = \frac{2M_\infty^2 + 1}{M_\infty^4} + \left\{ \frac{[\kappa + 1 - \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p} (\kappa - 1)]^2}{4} + \frac{[\kappa - 1 - \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p} (\kappa - 1)]}{M_\infty^2} \right\} \sin^2 \delta, \quad (17)$$

wobei  $c^* = a_G$  die kritische Geschwindigkeit ist.

Die in (13) und (14) auftretenden Grössen  $\Omega$  errechnen sich zu

$$\Omega_1 = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p},$$

$$\Omega_2 = \frac{2}{\kappa + 1} \frac{\Omega_1}{1 + \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}},$$

$$\Omega_3 = \frac{2\Omega_1}{1 - \Omega_1} \frac{\eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}}{\kappa M_\infty^2} \frac{1}{1 + \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}},$$

$$c = - \frac{\cos^2 \delta}{M_\infty^4}.$$

$\delta$  ist der Keilwinkel, siehe Bild 2.

In Bild 5 ist der Stosswinkel  $\theta$  über dem Umlenkwinkel  $\delta$  für  $M_\infty = 4$ ,  $\eta = 1$  und die Dichteverhältnisse  $\rho_\infty/\rho_p = 0.0, 0.01$  und  $0.1$ , die einem Partikelvolumenanteil von  $\varepsilon = 0.0, 0.01$  und  $0.09$  entsprechen, aufgetragen.

$\varepsilon$  lässt sich mit (3) und (4) berechnen zu

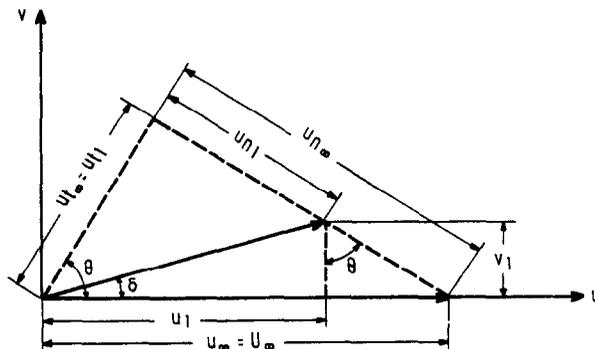


Abb. 4. Definition der Winkel und Geschwindigkeitskomponenten zur Konstruktion der Stosspolaren.

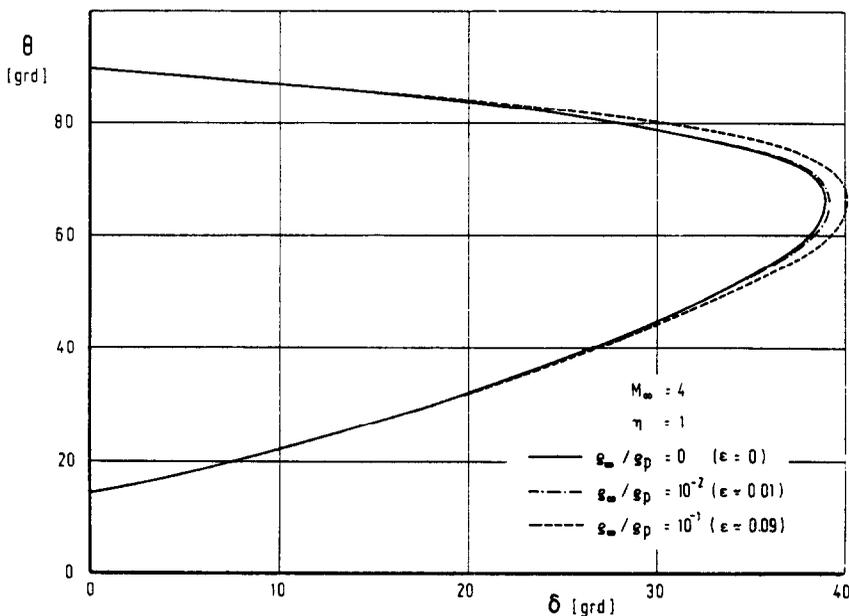


ABB. 5. Stosswinkel bei einem gefrorenen Verdichtungsstoss über dem Umlenkwinkel bei verschiedenen Partikelvolumina.

$$\epsilon = \frac{\eta \frac{\rho_\alpha}{\rho_p}}{1 + \eta \frac{\rho_\alpha}{\rho_p}} \quad (18)$$

Die Ergebnisse in Bild 5 zeigen deutlich, dass selbst bei grosser Partikelbelastung die Unterschiede zur reinen Gasströmung sehr klein sind. Man kann daraus schliessen, dass in Gas-Partikel-Strömungen die Gaszustände hinter einem gefrorenen Stoss durch die Grössen des reinen Gases gegeben sind.

4. EINFLUSS DES PARTIKELVOLUMENS AUF DIE ZUSTÄNDE IM GLEICHGEWICHTSGEBIET FÜR PARTIKEL KLEINEN DURCHMESSERS

Wie in 3. gezeigt, werden die Zustandsgrössen des Gases unmittelbar hinter dem Stoss denen der reinen Gasströmung entsprechen und für die Partikel gelten dieselben Bedingungen wie vor dem Stoss. Im Relaxationsgebiet werden sich bei grossem Partikelmassestrom ausser den Zustandsgrössen der Partikel auch die Zustandsgrössen des Gases ändern. Nur die Richtung der Gasströmung bleibt unverändert parallel zur Keiloberfläche. Bei kleinen Partikeln wird, wie in 2. gezeigt, das Relaxationsgebiet auch klein sein. Demnach werden nur wenige Partikel im Relaxationsgebiet auf die Keiloberfläche aufschlagen. Man kann folglich annehmen, dass die Gradienten aller Grössen parallel zum Stoss identisch Null sind. Unter diesen Bedingungen sind aber die Gleichgewichtszustände hinter dem Relaxationsgebiet unabhängig von seiner Ausdehnung und identisch zu denen, die sich für einen fiktiven Stoss ergeben würden, bei dem die Zustände von Gas und Partikeln unmittelbar im Stoss angepasst sind. Dieser fiktive

Stoss wird Gleichgewichtsstoss genannt, und seine Neigung weicht natürlich von der eines gefrorenen Verdichtungsstosses ab. Im folgenden werden die Gleichgewichtszustände hinter dem Relaxationsgebiet mit Hilfe des Konzepts des Gleichgewichtsstosses berechnet.

4.1. Der Volumenanteil der Partikel ist nicht vernachlässigbar

Unter den gemachten Voraussetzungen lauten die entsprechenden Erhaltungssätze,

Kontinuitätsgleichung:

$$\rho_\infty u_{n_\infty} = \rho_1 u_{n_1} \frac{1 + \eta \frac{\rho_\alpha}{\rho_p}}{1 + \eta \frac{\rho_1}{\rho_p}} \quad (19)$$

Impulsgleichung parallel zum Stoss:

$$u_{t_x} = u_{t_1} \quad (20)$$

Impulsgleichung senkrecht zum Stoss:

$$p_\infty + \rho_\alpha u_n^2 \frac{1 + \eta}{1 + \eta \frac{\rho_\alpha}{\rho_p}} = p_1 + \rho_1 u_{n_1}^2 \frac{1 + \eta}{1 + \eta \frac{\rho_1}{\rho_p}} \quad (21)$$

Energiegleichung:

$$(1 + \eta) \frac{U_\alpha^2}{2} + \left(1 + \eta \frac{c}{c_p}\right) c_p T_\infty + \eta \frac{p_\alpha}{\rho_p} = (1 + \eta) \frac{U_1^2}{2} + \left(1 + \eta \frac{c}{c_p}\right) c_p T_1 + \eta \frac{p_1}{\rho_p} \quad (22)$$

Daraus ergeben sich,

Rankine-Hugoniot Bedingungen:

$$\frac{p_1}{p_\infty} = \frac{\kappa_G + 1}{\kappa_G - 1} \frac{\rho_1}{\rho_\infty} - 1, \quad (23)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_\infty} = \frac{\kappa_G + 1}{\kappa_G - 1} \frac{p_1}{p_\infty} + 1, \quad (24)$$

Prandtl-Beziehung:

$$(1 - \phi_1) \left[ c^{*2} (1 + \phi_2) - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} u_{t_x}^2 (1 - \phi_3) \right] = u_{n_x} u_{n_1} (1 + \phi_4) + u_{n_x}^2 \phi_5, \quad (25)$$

Stosspolare:

$$\left( \frac{v_1}{c^*} \right)^2 = \left( \frac{u_\infty}{c^*} - \frac{u_1}{c^*} \right)^2 \times \frac{(1 + \phi_4) \frac{u_\infty u_1}{c^* c^*} - (1 - \phi_1)(1 + \phi_2) + \phi_5 \left( \frac{u_\infty}{c^*} \right)^2}{(1 - \phi_1)(1 + \phi_2) + \frac{2}{\kappa + 1} (1 + \phi_6) \left( \frac{u_\infty}{c^*} \right)^2 - (1 + \phi_4) \frac{u_\infty u_1}{c^* c^*}} \quad (26)$$

Die in (25) und (26) benutzten Grössen  $\phi$  lauten:

$$\phi_1 = \frac{\frac{\kappa - 1}{\kappa} \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}}{1 + \eta \frac{c}{c_p}},$$

$$\phi_2 = \frac{2\kappa}{\kappa + 1} \eta \frac{c}{c_p} \frac{\left(1 + \eta \frac{c}{c_p}\right) + \frac{\kappa - 1}{\kappa} \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}}{\left(1 + \eta \frac{c}{c_p}\right) \left(1 + \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}\right)},$$

$$\phi_3 = \frac{2(\kappa - 1)}{(1 - \phi_1)} \frac{\eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}}{1 + \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}} \frac{\eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}}{\kappa M_\infty^2 \kappa_G \left(1 + \eta \frac{c}{c_p}\right)},$$

$$\phi_4 = \frac{\frac{2\kappa}{\kappa + 1} \eta \frac{c}{c_p} - \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}}{1 + \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}},$$

$$\phi_5 = \frac{2\kappa}{\kappa + 1} \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p} \left\{ \frac{1}{\left(1 + \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}\right)^2} \times \left[ \frac{\kappa - 1}{\kappa} - \eta \left( \frac{c}{c_p} - \frac{\rho_\infty}{\rho_p} \right) - \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \left(1 + \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}\right) \right] \right\}$$

$$\left. - \frac{\left( \frac{\kappa - 1}{\kappa} \right)^2}{2 \left(1 + \eta \frac{c}{c_p}\right)} \left[ 1 + 2 \frac{\eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}}{\kappa_G M_\infty^2 \left(1 + \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}\right)} \right] \right\},$$

$$\phi_6 = \frac{1}{2} [\phi_4 (\kappa + 1) - (\kappa - 1) \{ (1 - \phi_1)(1 - \phi_3) - 1 \}].$$

Der Stosswinkel ergibt sich zu:

$$\sin^6 \theta + a \sin^4 \theta + b \sin^2 \theta + c = 0, \quad (28)$$

mit

$$a = - \frac{2 \left(1 + \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}\right)}{M_\infty^2} - \left(1 + \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}\right) (\kappa_G + 1) \sin^2 \delta - \cos^2 \delta,$$

$$b = \frac{\left(1 + \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}\right)^2}{M_\infty^4} + \left(1 + \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}\right)^2$$

$$\times \left[ \frac{\kappa_G + 1}{M_\infty^2} + \frac{(\kappa_G + 1)^2}{4} \right] \sin^2 \delta + \frac{2 \left(1 + \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}\right)}{M_\infty^2} \cos^2 \delta,$$

$$c = - \frac{\left(1 + \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}\right)}{M_\infty^4} \cos^2 \delta. \quad (29)$$

Die Gleichungen für das Verhältnis der statischen Drücke, das Dichteverhältnis und das Machzahlverhältnis über den Stoss lauten:

$$\frac{p_1}{p_\infty} = \frac{2\kappa_G M_\infty^2 \sin^2 \theta - \left(1 + \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}\right) (\kappa_G - 1)}{\left(1 + \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}\right) (\kappa_G + 1)}, \quad (30)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_\infty} = \frac{M_\infty^2 \sin^2 \theta (\kappa_G + 1)}{M_\infty^2 \sin^2 \theta (\kappa_G - 1) + 2 \left(1 + \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}\right)}, \quad (31)$$

und

$$\left( \frac{M_1}{M_\infty} \right)^2 = \frac{p_\infty}{p_1} \frac{\left(1 + \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}\right)}{\left( \frac{\rho_\infty}{\rho_1} + \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p} \right)} \times \left[ \sin^2 \theta \left\{ \left( \frac{\rho_\infty + \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}}{\rho_1 + \eta \frac{\rho_\infty}{\rho_p}} \right)^2 - 1 \right\} + 1 \right]. \quad (32)$$

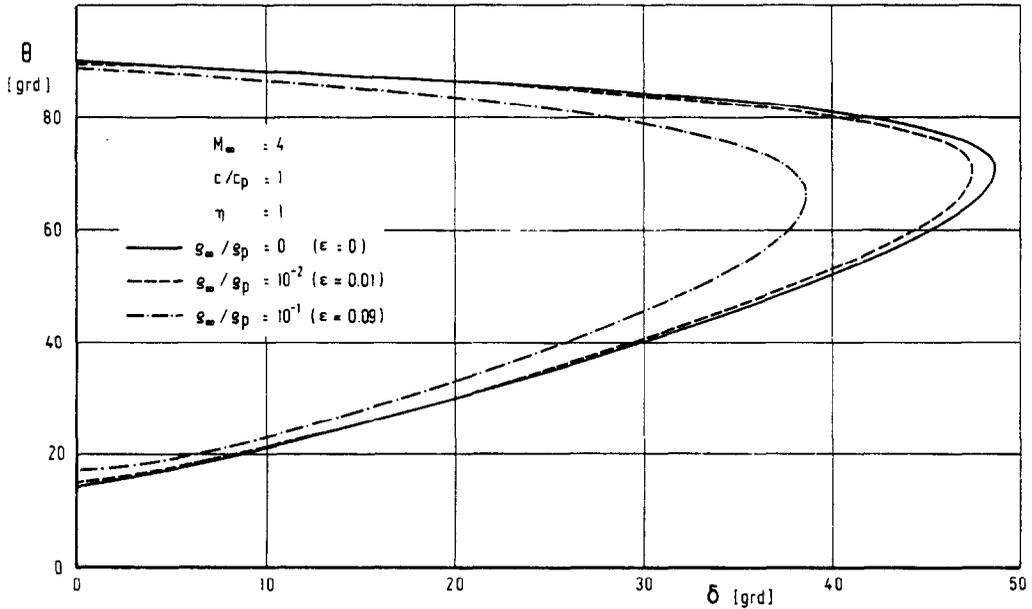


ABB. 6. Stosswinkel bei einem Gleichgewichtsstoss über dem Umlenkwinkel bei verschiedenen Partikelvolumina.

In Bild 6 ist der Verlauf des Stosswinkels  $\theta$  über dem Keilwinkel  $\delta$  für eine Machzahl  $M_\infty = 4$ , für ein Verhältnis der spezifischen Wärmen  $(c/c_p) = 1$  und ein Massestromverhältnis  $\eta = 1$  mit dem Dichteverhältnis  $\rho_\infty/\rho_p$  als Parameter aufgetragen. Die entsprechenden Volumenanteile der Partikel  $\epsilon, \epsilon = (\eta, \rho_\infty/\rho_p)$  (18), sind in Bild 5 angegeben. Ein typischer Wert für  $\rho_\infty/\rho_p$  in der Atmosphäre ist  $10^{-3}$ . Man sieht deutlich, dass nur für grosse Werte von  $\rho_\infty/\rho_p$  und bei gleichzeitig grossem Partikelmassestrom ( $\eta = 1$ ) der Einfluss des Partikelvolumens eine Rolle spielt.

4.2. Der Volumenanteil der Partikel ist klein

Für kleine Werte von  $\epsilon$  sind die Erhaltungssätze identisch zu den (19)–(22), wenn die Grössen  $\eta(\rho_\infty/\rho_p), \eta(\rho_1/\rho_p), \eta(p_\infty/\rho_p)$  und  $\eta(p_1/\rho_p)$  vernachlässigt werden. Die Schallgeschwindigkeit  $a_G$  lautet für  $\epsilon \ll 1$

$$a_G^2 = a^2 \frac{\kappa_G}{\kappa(1 + \eta)} \tag{33}$$

Die Rankine-Hugoniot Bedingungen sind unabhängig von der Grösse von  $\epsilon$ .

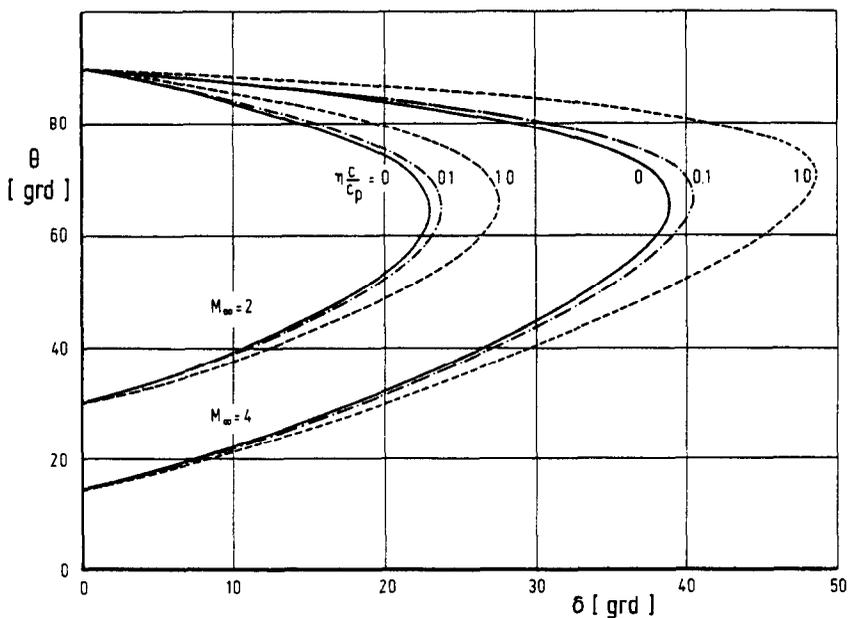


ABB. 7. Stosswinkel über dem Umlenkwinkel mit  $\eta(c/c_p)$  als Parameter.

Die Prandtl-Beziehung vereinfacht sich zu:

$$c^{*2} - \frac{\kappa_G - 1}{\kappa_G + 1} u_{t_x}^2 = u_{n_x} u_{n_1}. \quad (34)$$

Für die Stosspolare gilt:

$$\left(\frac{v_1}{c^*}\right)^2 = \left(\frac{u_\infty}{c^*} - \frac{u_1}{c^*}\right)^2 \frac{\frac{u_\infty u_1}{c^* c^*} - 1}{1 - \frac{u_\infty u_1}{c^* c^*} + \frac{2}{\kappa_G + 1} \left(\frac{u_\infty}{c^*}\right)^2}. \quad (35)$$

Der Stosswinkel errechnet sich zu:

$$\sin^6 \theta + a \sin^4 \theta + b \sin^2 \theta + c = 0, \quad (36)$$

mit

$$\begin{aligned} a &= -\frac{2 + M_\infty^2}{M_\infty^2} - \kappa_G \sin^2 \delta, \\ b &= \frac{2M_\infty^2 + 1}{M_\infty^2} + \left[ \frac{\kappa_G - 1}{M_\infty^2} + \frac{(\kappa_G + 1)^2}{4} \right] \sin^2 \delta, \\ c &= -\frac{\cos^2 \delta}{M_\infty^4}. \end{aligned} \quad (37)$$

Für das Dichte-, Druck- und Machzahlverhältnis erhält man:

$$\frac{p_1}{p_\infty} = \frac{2\kappa_G M_\infty^2 \sin^2 \theta - (\kappa_G - 1)}{\kappa_G + 1}, \quad (38)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_\infty} = \frac{M_\infty^2 \sin^2 \theta (\kappa_G + 1)}{M_\infty^2 \sin^2 \theta (\kappa_G - 1) + 2}, \quad (39)$$

und

$$\left(\frac{M_1}{M_\infty}\right)^2 = \frac{(\kappa_G + 1)^2 M_\infty^4 \sin^2 \theta - 4(M_\infty^2 \sin^2 \theta - 1)(\kappa_G M_\infty^2 \sin^2 \theta + 1)}{[2\kappa_G M_\infty^2 \sin^2 \theta - (\kappa_G - 1)][M_\infty^2 \sin^2 \theta (\kappa_G - 1) + 2]}. \quad (40)$$

Die Gleichungen (34)–(40) sind identisch zu denen für ideale Gase, wenn für  $\kappa$  der Wert des Gemisches  $\kappa_G$  eingesetzt wird.

Die Bilder 7–9 zeigen die Ergebnisse für den Stosswinkel  $\theta$ , das Druckverhältnis  $p_1/p_\infty$  und die Machzahl  $M_1$  aufgetragen über dem Keilwinkel  $\delta$  für verschiedene Werte von  $\eta(c/c_p) = 0, 0.1$  und  $1$ . Die entsprechenden Werte für  $\kappa/\kappa_G$  sind  $\kappa/\kappa_G = 1, 1.03636$  und  $1.2$ .

Bild 10 zeigt die Stosspolaren für  $M_\infty = 2$  und  $4$  mit  $\eta(c/c_p) = 0, 0.1$  und  $1$ .

##### 5. PARTIKELVERHALTEN FÜR KLEINE PARTIKELMASSESTRÖME

In den Arbeiten von Probststein und Fassio [8] und von Peddieson und Luy [9] sind analytische Ausdrücke für die Flugbahnen, Auftreffgeschwindigkeiten und Auftreffdichten von Partikeln um schlanke Keil im Hyperschall entwickelt worden. Für kleine Partikelmasseströme ( $\eta \ll 1$ ) entsprechen die Zustandsgrößen des Gases in der Zweiphasen-

strömung denen der reinen Gasströmung. In [8, 9] sind folgende für schlanke Keile im Hyperschall gültige Annahmen getroffen worden:

1. Die Gasgeschwindigkeit parallel zum Keil ist gleich der Anströmgeschwindigkeit.
2. Der Stosswinkel errechnet sich aus

$$\theta = \frac{\delta}{1 + \frac{\rho_\infty}{\rho_1}}. \quad (41)$$

3. Unmittelbar hinter dem Stoss ist die Geschwindigkeitskomponente der Partikel parallel zum Keil gleich der Anströmgeschwindigkeit  $U_\infty$  und die Komponente senkrecht zum Keil gleich  $-U_\infty \delta$ . In der vorliegenden Arbeit werden keinerlei Annahmen dieser Art getroffen, damit sind die Gleichungen auch für Keile grossen Öffnungswinkels im geringen Überschall gültig. Die normalerweise notwendige numerische Integration der Bewegungsgleichungen wird durch die Wahl eines auf den Stoss bezogenen Koordinatensystems umgangen und die Integration der Differentialgleichungen kann analytisch ausgeführt werden.

##### 5.1. Bewegungsgleichungen

Die dimensionslosen Bewegungsgleichungen für Partikel in dem uniformen Gasgeschwindigkeitsfeld der Stossschicht lauten:

$$\frac{du_p}{dt} = -\frac{3}{4} \frac{\rho}{\rho_p} c_w (u_p - u) [(u_p - u)^2 + (v_p - v)^2]^{1/2}, \quad (42)$$

$$\frac{dv_p}{dt} = -\frac{3}{4} \frac{\rho}{\rho_p} c_w (v_p - v) [(u_p - u)^2 + (v_p - v)^2]^{1/2}, \quad (43)$$

mit

$$u_p = \frac{\bar{u}_p}{U_\infty}, v_p = \frac{\bar{v}_p}{U_\infty}, u = \frac{\bar{u}}{U_\infty}, v = \frac{\bar{v}}{U_\infty}$$

und

$$t = \tau \frac{U_\infty}{D}.$$

$\bar{u}_p$  und  $\bar{v}_p$  sind die Komponenten der Partikelgeschwindigkeit,  $\bar{u}$  und  $\bar{v}$  die Komponenten der Gasgeschwindigkeit,  $U_\infty$  die Anströmgeschwindigkeit und  $D$  der Partikeldurchmesser. Der gemessene Verlauf des Widerstandsbeiwertes eines kugelförmigen Partikels  $c_w$  ist als Funktion der Reynoldszahl  $Re$  in Bild 11 gezeigt. In [11] ist eine

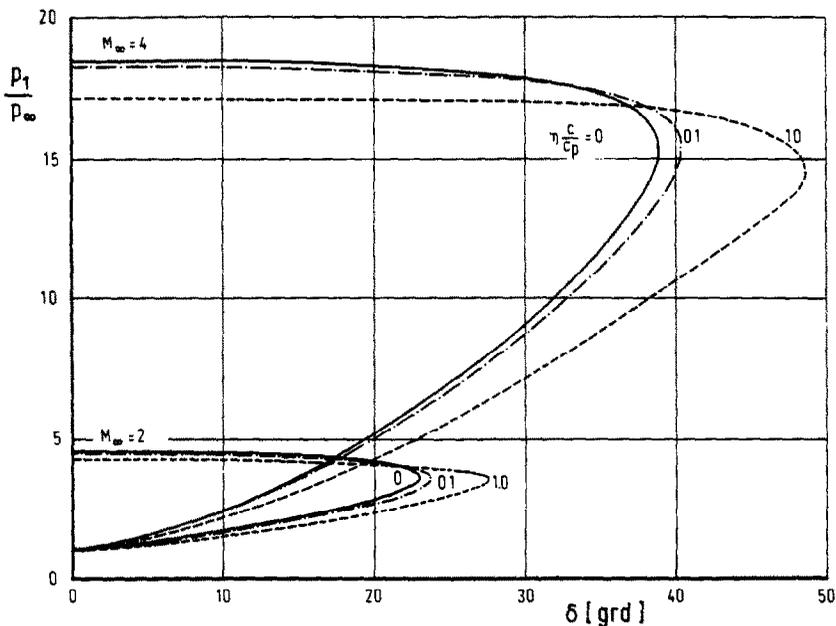


ABB. 8. Das Verhältnis der statischen Drücke vor und hinter dem Stoss über dem Umlenkwinkel mit  $\eta(c/c_p)$  als Parameter.

Formulierung angegeben, die die gemessene Kurve mit analytisch annähert, siehe Bild 11,

$$c_w = \frac{A_1}{Re^{B_1}} \quad (44)$$

$$P_i = \frac{3}{4} \frac{\rho}{\rho_p} A_1 Re_\infty^{-B_1} \left( \frac{\rho_\infty \mu}{\rho_p \mu_\infty} \right)^{B_1} \quad (46)$$

mit

$$Re = \frac{D \rho U_\infty}{\mu} [(u_p - u)^2 + (v_p - v)^2]^{1/2} \quad (45)$$

$$Re_\infty = \frac{D \rho_\infty U_\infty}{\mu_\infty}$$

und

wobei  $\rho$  und  $\mu$  die Dichte und Viskosität des Gases in der Stossschicht sind,

Es gilt für

$$Re < 1 : A_1 = 24 ; B_1 = 1 ;$$

$$1 < Re < 10^3 : A_2 = 24 ; B_2 = \frac{2}{3} ;$$

$$Re > 10^3 : A_3 = 0.44 ; B_3 = 0 ;$$

ergeben (42) und (43)

$$\frac{du_p}{dt} = -P_i [(u_p - u)^2 + (v_p - v)^2]^{(1-B_1)/2} (u_p - u), \quad (47)$$

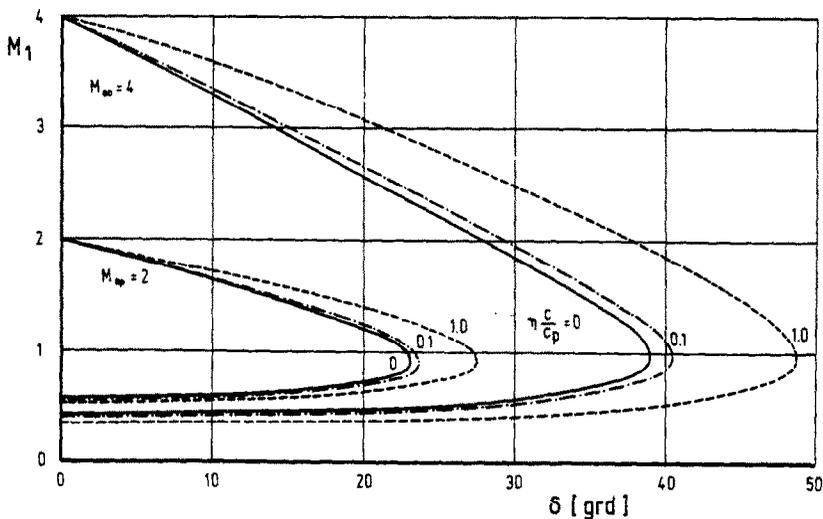


ABB. 9. Machzahl hinter dem Stoss über dem Umlenkwinkel mit  $\eta(c/c_p)$  als Parameter.

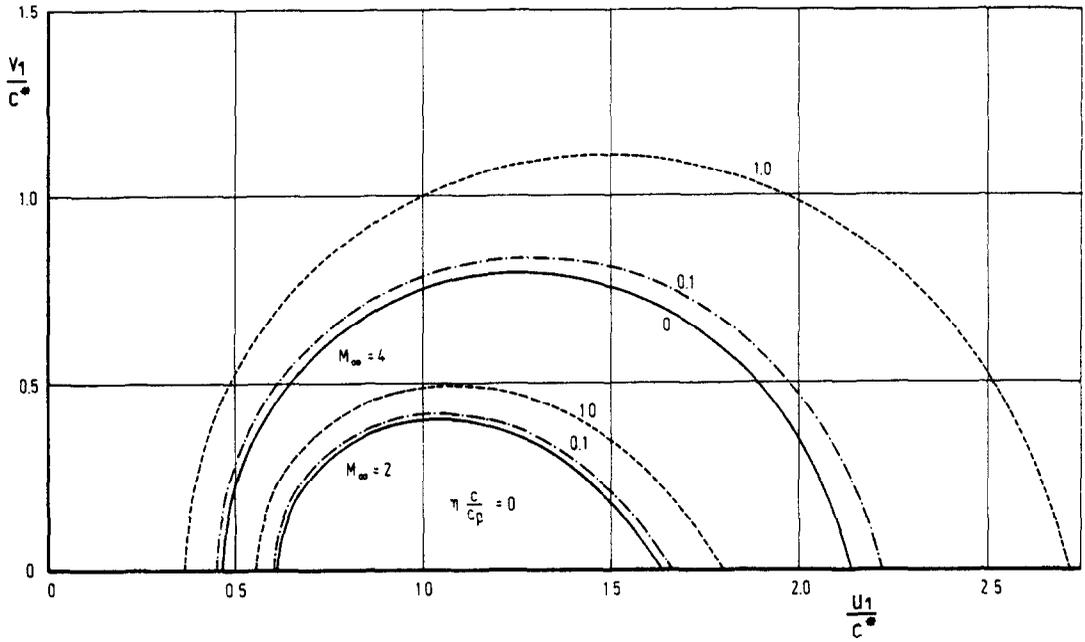


ABB. 10. Stosspolaren mit  $\eta(c/c_p)$  als Parameter.

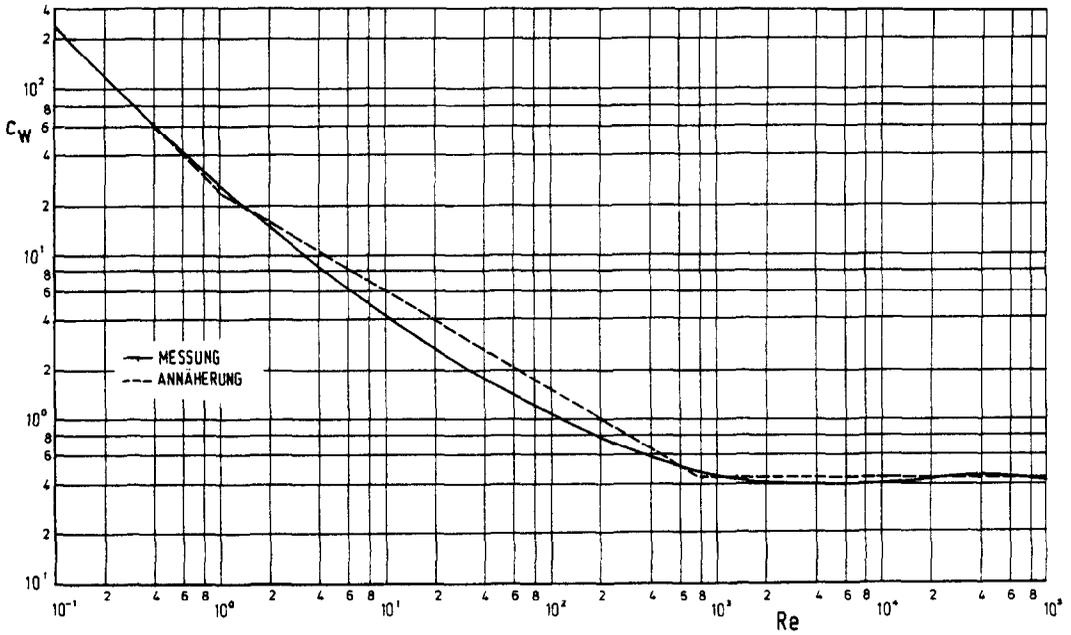


ABB. 11. Widerstandsbeiwert einer Kugel als Funktion der Reynoldszahl.

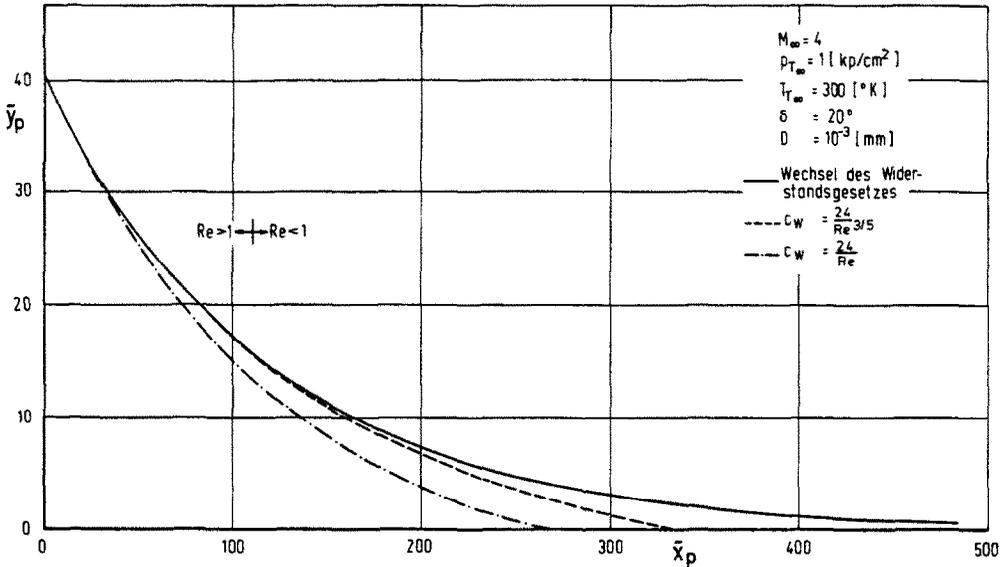


ABB. 12. Partikelflugbahnen bei verschiedenen Widerstandsgesetzen.

$$\frac{dv_p}{dt} = -P_1 [(u_p - u)^2 + (v_p - v)^2]^{(1-P_1)/2} (v_p - v). \quad (48)$$

Gleichungen (47) und (48) müssten simultan gelöst werden. Die vorgeschlagene Wahl des Koordinatensystems ermöglicht aber eine einfache, analytische Integration des Gleichungssystems. Nimmt man an, dass die  $y$ -Richtung parallel zum Stoß und die  $x$ -Richtung senkrecht dazu verläuft und ferner, dass  $u, u_p$  und  $v, v_p$  die Komponenten der Gas- und der Partikelgeschwindigkeit in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung sind, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} v &= v_p = v_\infty = \cos \theta \\ u &= \cos \theta \tan(\theta - \delta) \end{aligned} \quad (49)$$

Mit (49) folgt für (47) und (48)

$$\frac{du_p}{dt} = -P_1 (u_p - u)^{2-B_1}, \quad (50)$$

$$\frac{dv_p}{dt} = 0. \quad (51)$$

### 5.2. Flugbahnen, Auftreffgeschwindigkeiten und Auftreffdichten der Partikel

Entsprechend der Aufteilung der  $Re$ -Zahlbereiche zur Ermittlung von  $c_w$  werden hier drei verschiedene Verhaltensweisen der Partikel beschrieben. Im folgenden sind die Koordinaten dimensionslos gemacht mit dem Partikeldurchmesser  $D$ .

Bereich 1:

$$Re < 1: P_1 = \frac{18 \rho_\infty \mu}{Re_\infty \rho_p \mu_\infty}, \quad (52)$$

$$\frac{u_p}{u} = 1 + \frac{u_p^x - u}{u} \exp \left[ -\frac{P_1}{v_\infty} (y_p - y_p^x) \right], \quad (53)$$

$$\begin{aligned} x_p - x_p^x &= \frac{u}{v_\infty} (y_p - y_p^x) - \frac{u_p^x - u}{P_1} \\ &\times \left\{ \exp \left[ -\frac{P_1}{v_\infty} (y_p - y_p^x) - 1 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (54)$$

Bereich 2:  $1 < Re < 10^3$ ,

$$P_2 = \frac{18}{Re^{3/5}} \frac{\rho}{\rho_p} \left( \frac{\rho_\infty \mu}{\rho \mu_\infty} \right)^{3/5}, \quad (55)$$

$$\frac{u_p}{u} = 1 + \frac{1}{u} \left[ (u_p^x - u)^{-(2/5)} + \frac{2}{3} \frac{P_2}{v_\infty} (y_p - y_p^x) \right]^{-(5/2)}, \quad (56)$$

$$\begin{aligned} x_p - x_p^x &= \frac{u}{v_\infty} (y_p - y_p^x) - \frac{5}{3P_2} \\ &\times \left[ \left\{ (u_p^x - u)^{-(2/5)} + \frac{2}{3} \frac{P_2}{v_\infty} (y_p - y_p^x) \right\}^{-(3/2)} \right. \\ &\quad \left. - (u_p^x - u)^{3/5} \right], \end{aligned} \quad (57)$$

Bereich 3:  $Re > 10^3$ ,

$$P_3 = 0.33 \frac{\rho}{\rho_p}, \quad (58)$$

$$\frac{u_p}{u} = 1 + \frac{\frac{u_p^x - u}{u}}{\frac{P_3}{v_\infty} (u_p^x - u)(y_p - y_p^x) + 1}, \quad (59)$$

$$\begin{aligned} x_p - x_p^x &= \frac{u}{v_\infty} (y_p - y_p^x) + \frac{1}{P_3} \\ &\times \ln \left[ \frac{P_3}{v_\infty} (u_p^x - u)(y_p - y_p^x) + 1 \right]. \end{aligned} \quad (60)$$

$x_p$  und  $y_p$  sind die Koordinaten eines Partikels im  $x, y$  Koordinatensystem in der Stoßschicht. Die Größen  $x_p^x, y_p^x$  und  $u_p^x$  sind die Anfangswerte für  $x_p, y_p$  und  $u_p$

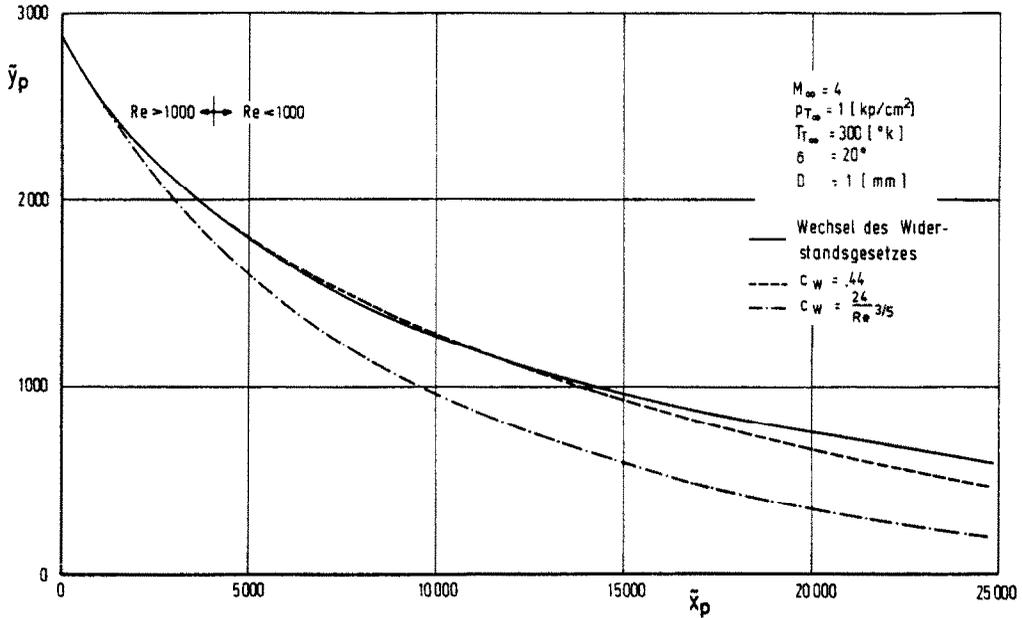


Abb. 13. Partikelflugbahnen bei verschiedenen Widerstandsgesetzen.

am Beginn der Gültigkeit der einzelnen Bereiche. In den Bildern 12 und 13 sind Beispielrechnungen gezeigt, bei denen innerhalb der Stosschicht die Variation von  $Re$  so war, dass Bereichsgrenzen gewechselt wurden. Drei Berechnungsergebnisse für die Flugbahn  $[\bar{y}_p = \bar{y}_p(\bar{x}_p)]$  sind dargestellt; die durchgezogenen Kurven entsprechen einer Rechnung mit einem Wechsel des Widerstandsgesetzes  $c_w = c_w(Re)$  innerhalb der Stosschicht, bei den verbleibenden Kurven ist mit zwei konstanten Widerstandsgesetzen gerechnet worden, die dem  $Re$ -Zahlbereich unmittelbar hinter dem Stoss und dem sich anschliessenden  $Re$ -Zahlbereich entsprechen. ( $\bar{x}_p$  und  $\bar{y}_p$  sind die Koordinaten eines Partikels in dem Koordinatensystem  $\bar{x}, \bar{y}$ , das durch Drehung um einen Winkel von  $90 - (\theta - \delta)$  aus dem  $x, y$  System entstanden ist;  $p_{T_\infty}$  und  $T_{T_\infty}$  sind der Totaldruck bzw. Totaltemperatur der ungestörten Strömung.)

Auf der Geraden  $y = \text{const.}$ , die durch die Keilspitze geht, gibt es einen ausgezeichneten Abstand  $y'$ . Partikel, die dort in die Stosschicht eintreten, werden stromabwärts gerade noch die Keiloberfläche tangieren, d.h. alle Partikel, die bei  $y < y'$  in die Stosschicht eintreten, schlagen auf der Keiloberfläche auf. Für den Bereich  $Re > 10^3$  existiert die errechenbare Grösse  $y'$  nicht, da der Widerstandsbeiwert  $c_w$  für diesen Bereich konstant ist.

Bereich 1:

$$y' = \frac{u_p^x - u v_\infty}{u P_1} \tag{61}$$

Bereich 2:

$$y' = \frac{5}{3P_2} (u_p^x - u)^{3/5} \frac{v_\infty}{u} \tag{62}$$

Die Auftreffgeschwindigkeit der Partikel auf die Keiloberfläche errechnet sich aus

$$V_A = u_p \cos(\theta - \delta) - v_\infty \sin(\theta - \delta) \tag{63}$$

Die auf die Auftreffgeschwindigkeit  $V'_A$  an der Keilspitze bezogene Geschwindigkeit  $V_A$  ergibt

$$\frac{V_A}{V'_A} = \frac{u_p - u}{u_p^x - u} \tag{64}$$

mit

$$V'_A = \sin \delta.$$

Die Auftreffdichte  $E$  wird definiert als das Verhältnis der Partikel, die auf der Keiloberfläche auftreffen, zu den Partikeln, die unbeeinflusst von der Gasströmung, auftreffen würden.

Es folgt:

$$E = \frac{\text{ctg}(\theta - \delta) - \frac{y_p}{x_p}}{\text{ctg}(\theta - \delta) - \text{ctg} \theta} = \frac{\frac{v_\infty}{u} - \frac{y_p}{x_p}}{\frac{v_\infty}{u} - \frac{v_\infty}{u}} \tag{65}$$

Es lassen sich mit Hilfe der (61) und (62) vereinfachte Gleichungen angeben.

Bereich 1:

$$\frac{u_p}{u} = 1 + \frac{u_p^x - u}{u} \exp\left(-\frac{y_p - y_p^x}{y'} \frac{u_p^x - u}{u}\right) \tag{66}$$

$$\frac{x_p - x_p^x}{y'} = \frac{u}{v_\infty}$$

$$\times \left( \frac{y_p - y_p^x}{y'} + 1 - \exp\left[-\frac{y_p - y_p^x}{y'} \frac{u_p^x - u}{u}\right] \right) \tag{67}$$

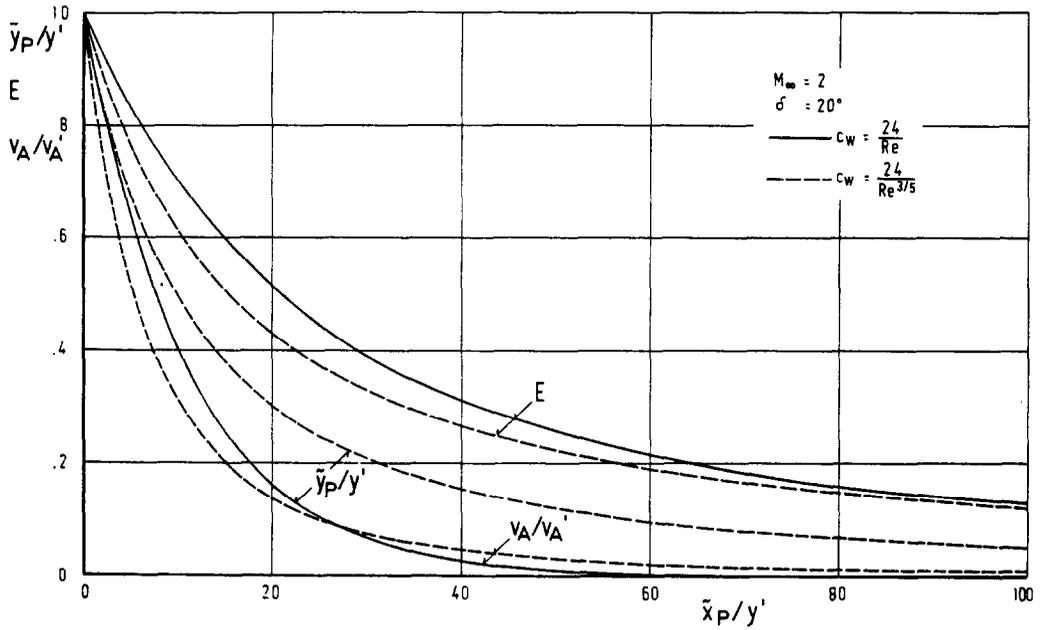


ABB. 14. Verlauf der Flugbahn, Auftreffdichte und Auftreffgeschwindigkeit der Partikel über der Keiltiefe bei  $M_\infty = 2$ .

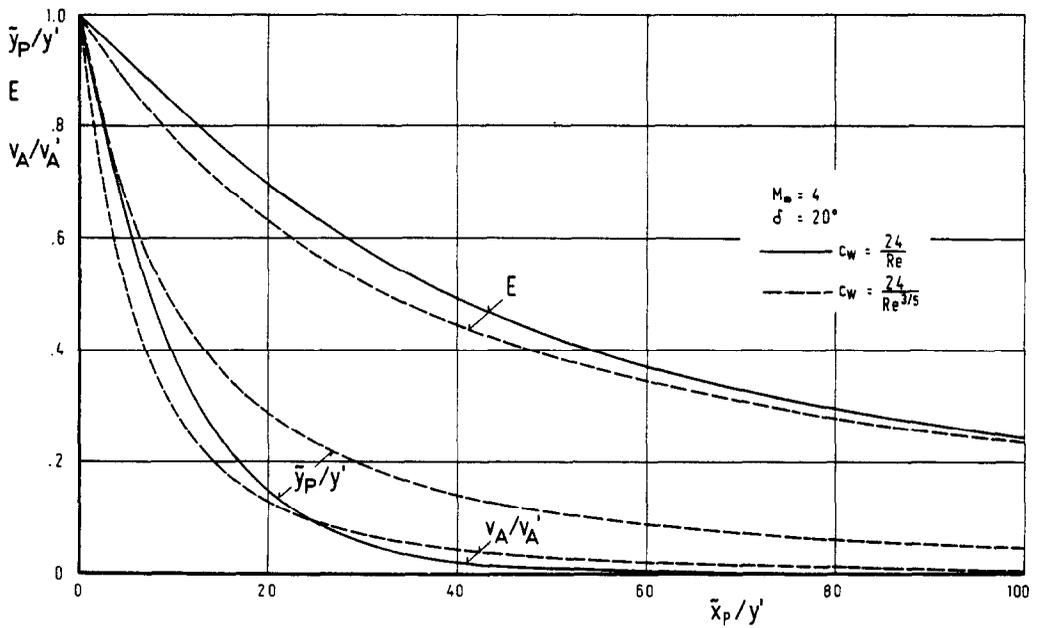


ABB. 15. Verlauf der Flugbahn, Auftreffdichte und Auftreffgeschwindigkeit der Partikel über der Keiltiefe bei  $M_\infty = 4$ .

$$\frac{V_A}{V'_A} = \exp\left(-\frac{y_p}{y'} \frac{u_p^* - u}{u}\right), \quad (68)$$

$$E = \frac{u_p^* - u}{u} \times \left(-\frac{y'}{y_p} \left[\exp\left\{-\frac{y_p}{y'} \frac{u_p^* - u}{u}\right\} - 1\right]\right)^{-1}, \quad (69)$$

Bereich 2:

$$\frac{u_p}{u} = 1 + \frac{u_p^* - u}{u} \times \left(1 + \frac{2}{3} \frac{y_p - y_p^*}{y'} \frac{u_p^* - u}{u}\right)^{-(5/2)}, \quad (70)$$

$$\frac{x_p - x_p^*}{y'} = \frac{u}{v_\infty} \times \left(\frac{y_p - y_p^*}{y'} + 1 - \left[1 + \frac{2}{3} \frac{y_p - y_p^*}{y'} \frac{u_p^* - u}{u}\right]^{-(3/2)}\right), \quad (71)$$

$$\frac{V_A}{V'_A} = \left(1 + \frac{2}{3} \frac{y_p - y_p^*}{y'} \frac{u_p^* - u}{u}\right)^{-(5/2)}, \quad (72)$$

$$E = \frac{u_p^* - u}{u} \times \left(-\frac{y'}{y_p} \left[\left\{1 + \frac{2}{3} \frac{y_p - y_p^*}{y'} \frac{u_p^* - u}{u}\right\}^{-(3/2)} - 1\right]\right)^{-1}. \quad (73)$$

Für den Bereich 3 gelten für  $u_p/u$  und  $x_p - x_p^*$  (59) und (60).  $V_A/V'_A$  und  $E$  können mit den (59), (60), (64) und (65) mit  $x_p^* = y_p^* = 0$  ermittelt werden. Die

Gleichungen (66)–(73) geben die gesuchten Größen in einer Form wieder, die unabhängig ist vom Partikeldurchmesser und von der  $Re$ -Zahl. Die Ergebnisse für  $M_\infty = 2$  und 4 sind in den Bildern 14 und 15 gezeigt. ( $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  sind wiederum die um den Winkel  $90-(\theta-\delta)$  gedrehten Koordinaten).

SCHRIFTTUM

1. G. Rudinger, Some effects of finite particle volume on the dynamics of gas-particle mixtures, *AIAA Jl* 3, 1217-1222 (1965).
2. F. E. Marble, Dynamics of a gas containing small solid particles in *Fifth AGARD Combustion and Propulsion Colloquium*, pp. 175-215. Pergamon Press, Oxford (1963).
3. T. D. Varma und N. K. Chopra, Analysis of normal shock waves in a gas-particle mixture, *Z. Angew. Math. Phys.* 18, 650-660 (1967).
4. G. F. Carrier, Shock waves in a dusty gas, *J. Fluid Mech.* 4, 376-382 (1958).
5. B. Schmitt von Schubert, Struktur stationärer Verdichtungsstöße in Gasen mit festen Teilchen, *Z. Angew. Math. Mech.* 50, 671-682 (1977).
6. W. Wuest, Hyperschallströmung staubhaltiger Gase bei geringer Dichte, *Flugwiss.* 18, 185-194 (1970).
7. G. D. Waldman und W. G. Reineke, Particle trajectories, heating and breakup in hypersonic shock layers, *AIAA Jl* 9, 1040-1048 (1971).
8. R. F. Probst und F. Fassio, Dusty hypersonic flows, *AIAA Jl* 8, 772-779 (1970).
9. J. Peddieson und C. H. Lyu, Dusty hypersonic wedge flow, *AIAA Jl* 11, 110-112 (1973).
10. A. Shapiro, *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*. Ronald Press, New York (1953).
11. R. B. Bird, W. E. Stewart und E. N. Lightfoot, *Transport Phenomena*. John Wiley, New York (1960).

SUPERSONIC GAS PARTICLE FLOWS OVER A WEDGE

**Abstract**—Supersonic gas-particle flows over wedges were investigated. The influence of the particle volume on the conditions of the gas immediately downstream of a frozen shock wave and for small particles on the equilibrium conditions of the gas and the particles at the end of the relaxation zone was examined. Analytic expressions were derived, which determine for small particle mass flows, the motion of the particles in the shock layer.

ÉCOULEMENTS SUPERSONIQUES GAZ-PARTICULES AUTOUR D'UN DIÈDRE

**Résumé**—On étudie les écoulements supersoniques gaz-particules autour d'un dièdre. On examine l'influence du volume de la particule sur les conditions du gaz immédiatement en aval d'une onde de choc et, pour les petites particules, sur les conditions d'équilibre du gaz et des particules à la fin de la zone de relaxation. Des expressions analytiques obtenues déterminent, pour les faibles débits massiques de particules, le mouvement de celles-ci dans la couche de choc.

ОБТЕКАНИЕ КЛИНА СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА С ЧАСТИЦАМИ

**Аннотация**—Проведено исследование обтекания клиньев сверхзвуковыми потоками газа с частицами. Исследуется влияние объемной доли частиц на условия течения газа непосредственно за замороженной ударной волной, а в случае частиц небольших размеров, на условия равновесия газа и частиц в конце релаксационной зоны. Для небольших массовых содержаний частиц получены аналитические выражения их движения в ударном слое.